Correction du devoir surveillé $n°3$

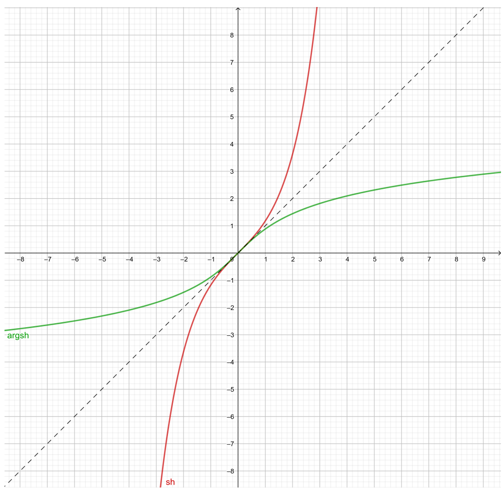
Autour de la fonction sinus hyperbolique

Partie I : Bijection

1. La fonction sh est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. Donc sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sh}(x);\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sh}(x)\right[=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$.
2. Tableau de variation de sh^{-1} :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\operatorname{sh}^{-1}(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3.



4. La bijection sh est dérivable de dérivée ch. De plus, ch ne s'annule jamais.
Donc sh^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$(\operatorname{sh}^{-1})'(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{sh}^{-1}(x))}=\frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{sh}^{-1}(x))}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(\operatorname{sh}^{-1}(x))+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

5. Soient $x,y\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x)=y &\iff \mathbf{e}^x-\mathbf{e}^{-x}=2y\\ &\iff \mathbf{e}^{2x}-2y\mathbf{e}^x-1=0\end{aligned}$$

Résolvons : $X^2-2yX-1=0$. $\Delta=4(y^2+1)$. Donc les solutions sont $y\pm\sqrt{y^2+1}$.

$$\operatorname{sh}(x)=y \iff \mathbf{e}^x=y\pm\sqrt{y^2+1} \underset{x\in\mathbb{R}\,i.e.\,\mathbf{e}^x\geqslant 0}{\iff} \mathbf{e}^x=y+\sqrt{y^2+1} \iff x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

Conclusion : $\forall y\in\mathbb{R},\operatorname{sh}^{-1}(y)=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$.

6. Soit $y \in \mathbb{R}$,

$$(\text{sh}^{-1})'(y) = \frac{1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}}{y + \sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

Partie II : Étude d'une suite définie par récurrence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \text{sh}(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. La fonction $g : x \mapsto \text{sh}(x) - x$ est dérivable de dérivée $g' : x \mapsto \text{ch}(x) - 1$ positive. De plus, la dérivée s'annule uniquement en 0, donc g est strictement croissante. Comme $g(0) = 0$, g est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On a $u_1 - u_0 = g(u_0)$. Donc $\begin{cases} u_1 > u_0 \text{ si } u_0 > 0 \\ u_1 = u_0 \text{ si } u_0 = 0 \\ u_1 < u_0 \text{ si } u_0 < 0 \end{cases}$.
3. La fonction sh est croissante. On montre facilement par récurrence que (u_n) est $\begin{cases} \text{croissante si } u_0 > 0 \\ \text{constante si } u_0 = 0 \\ \text{décroissante si } u_0 < 0 \end{cases}$.
4. D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) admet une limite qui vaut 0 quand $u_0 = 0$. Si $u_0 > 0$, alors (u_n) tend vers $l \in [u_0; +\infty[\cup\{+\infty\}$. Or, si par l'absurde l est finie, alors l est un point fixe de f (car f est continue) et donc l est un zéro de g i.e. $l = 0$. Absurde.
   Conclusion : (u_n) diverge vers $+\infty$ si $u_0 > 0$.
   De la même manière, on montre que (u_n) diverge vers $-\infty$ lorsque $u_0 < 0$.

Partie III : Une famille de matrices

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose la matrice suivante : $M_x = \begin{pmatrix} \text{ch}(x) & \text{sh}(x) \\ \text{sh}(x) & \text{ch}(x) \end{pmatrix}$.

1. $M_0 = I_2$.
2. Soient x et $y \in \mathbb{R}$.

$$M_x M_y = \begin{pmatrix} \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y) & \text{sh}(x)\,\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y) \\ \text{sh}(x)\,\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y) & \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}(x+y) & \text{sh}(x+y) \\ \text{sh}(x+y) & \text{ch}(x+y) \end{pmatrix} = M_{x+y}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $M_x M_{-x} = M_{-x} M_x = M_0 = I_2$. Donc la matrice M_x est inversible et $(M_x)^{-1} = M_{-x}$.
4. Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $(M_x)^n = M_{nx}$.
5. Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $M_x = \dfrac{\mathbf{e}^x}{2} A + \dfrac{\mathbf{e}^{-x}}{2} B$. De plus $AB = BA = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$, donc d'après le binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(M_x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{\mathbf{e}^x}{2} A\right)^k \left(\frac{\mathbf{e}^{-x}}{2} B\right)^{n-k} \underset{AB=0}{=} \left(\frac{\mathbf{e}^x}{2} A\right)^n + \left(\frac{\mathbf{e}^{-x}}{2} B\right)^n = \frac{\mathbf{e}^{nx}}{2^n} A^n + \frac{\mathbf{e}^{-nx}}{2^n} B^n.$$

   Or $A^n = 2^n A$ et $B^n = 2^n B$, d'où $(M_x)^n = \mathbf{e}^{nx} A + \mathbf{e}^{-nx} B = M_{nx}$.

Partie IV : Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $\text{sh}(x)y' - \text{ch}(x)y = \text{sh}(x)$.

1. Les fonctions considérées sont continues sur les intervalles donnés, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, elles admettent des primitives.
   (a) Une primitive de $f : x \mapsto \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $F : x \mapsto \ln(\text{sh}(x))$.
   (b) Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$ donc une primitive de $g : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ sur $]1; +\infty[$ est $G : x \mapsto \frac{1}{2}\left(\ln(x-1) - \ln(x+1)\right)$

(c) Une primitive de $h : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t$.
A l'aide du changement de variable $\mathscr{C}^1$ suivant $u = \mathbf{e}^t$, on obtient pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_1^x \frac{1}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t = 2\int_1^x \frac{\mathbf{e}^t}{\mathbf{e}^{2t}-1}\mathrm{d}t = 2\int_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}^x} \frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u = 2[G(u)]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}^x}$$

Donc une primitive de $h : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $H : x \mapsto 2G(\mathbf{e}^x) = \ln\left(\dfrac{\mathbf{e}^x - 1}{\mathbf{e}^x + 1}\right)$.

2. *Résolution de l'équation différentielle.*
   (a) Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle peut s'écrire $(E) : y' - \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients continus.

   <u>Résolution de l'équation homogène :</u> $(E_H) :\ y' - \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}y = 0$.
   $\mathcal{S}_H(\mathbb{R}_+^*) = \{x \mapsto \lambda e^{\ln(\mathrm{sh}(x))} = \lambda \mathrm{sh}(x),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

   <u>Recherche d'une solution particulière :</u> Nous allons utiliser la méthode de la variation de la constante i.e. nous allons chercher une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x)\mathrm{sh}(x)$ avec $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On a $y_p \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $y_p' : x \mapsto \lambda'(x)\mathrm{sh}(x) + \lambda(x)\,\mathrm{ch}(x)$.
   D'où y_p sol. de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$.
   On a déjà trouvé une primitive de $h : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est $H : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\mathbf{e}^x - 1}{\mathbf{e}^x + 1}\right)$.
   Donc, $y_p : x \mapsto \ln\left(\frac{\mathbf{e}^x-1}{\mathbf{e}^x+1}\right)\mathrm{sh}(x)$ est une solution particulière de (E).

   <u>Conclusion :</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*) = \{x \mapsto \ln\left(\frac{\mathbf{e}^x-1}{\mathbf{e}^x+1}\right)(\lambda + \mathrm{sh}(x)),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   (b) À l'aide d'un raisonnement analogue, on trouve : $\mathcal{S}(\mathbb{R}_-^*) = \{x \mapsto \ln\left(\frac{1-\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+1}\right)(\mu + \mathrm{sh}(x)),\ \mu \in \mathbb{R}\}$

   (c) On a $\frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \frac{\mathrm{sh}(x)-\mathrm{sh}(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{ch}'(0) = 1$.

   (d) Par l'absurde, supposons que (E) admette une solution y sur $\mathbb{R}$. Alors $y(0) = 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = \ln\left(\frac{\mathbf{e}^x-1}{\mathbf{e}^x+1}\right)(\lambda + \mathrm{sh}(x))$. Si $\lambda \neq 0$, $y(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \pm\infty$ ce qui est impossible car y est continue en 0. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = \ln\left(\frac{\mathbf{e}^x-1}{\mathbf{e}^x+1}\right)\mathrm{sh}(x)$. On a $\frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \ln\left(\frac{\mathbf{e}^x-1}{\mathbf{e}^x+1}\right)\frac{\mathrm{sh}(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ ce qui est impossible car y est dérivable en 0.
   Conclusion : $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \emptyset$.

Partie V : Égalité de deux fonctions

1. (a) La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur le même ensemble que sh, c'est-à-dire $\mathbb{R}$. Elle est dérivable comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)}$$

   La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g est définie sur le même ensemble que $\dfrac{\mathrm{sh}}{1+\mathrm{ch}}$, c'est-à-dire $\mathbb{R}$. Elle est dérivable comme composée de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) &= \frac{\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x)) - \mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2}.\frac{1}{1+\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)^2} \\
&= \frac{\mathrm{ch}(x)+1}{(1+\mathrm{ch}(x))^2}.\frac{(1+\mathrm{ch}(x))^2}{(1+\mathrm{ch}(x))^2+\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}(x)+1}{1+2\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)} \\
&= \frac{\mathrm{ch}(x)+1}{\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)+2\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}(x)+1}{2\mathrm{ch}^2(x)+2\mathrm{ch}(x)} = \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)}
\end{aligned}$$

(b) La fonction $f-g$ a une donc dérivée nulle donc elle est constante sur $\mathbb{R}$.
Or, $(f-g)(0)=0-0$ donc $f=g$ sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. $2f(x)=\text{Arctan}(\text{sh}(x))\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc on peut calculer $\tan(2f(x))$.
Etudions la fonction $h: x\mapsto \dfrac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)}$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=\dfrac{1}{1+\text{ch}(x)}>0$.
De plus, $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\dfrac{1+\mathbf{e}^{-2x}}{1+2\mathbf{e}^{-x}+\mathbf{e}^{-2x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-1$.
Finalement, $\forall x\in\mathbb{R},\ -1<h(x)<1$ d'où $-\dfrac{\pi}{4}<g(x)<\dfrac{\pi}{4}$ d'où $-\dfrac{\pi}{2}<2g(x)<\dfrac{\pi}{2}$ donc on peut calculer $\tan(2g(x))$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : $\tan(2f(x))=\text{sh}(x)$ et

$$\begin{aligned}\tan(2g(x)) &= \frac{2\tan(g(x))}{1-\tan^2(g(x))}\\ &= \frac{2\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)}\frac{1}{1-\left(\frac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)}\right)^2}=\frac{2\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)}.\frac{(1+\text{ch}(x))^2}{2+2\text{ch}(x)}=\text{sh}(x)\end{aligned}$$

Finalement, $\forall x\in\mathbb{R},\ \tan(2f(x))=\tan(2g(x))$.

(b) On a vu que $\forall x\in\mathbb{R},\ (2f(x),2g(x))\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[^2$ donc en composant par la fonction Arctan, on a bien que $f=g$ sur $\mathbb{R}$.

Partie VI : Étude d'une suite définie explicitement

Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $n\in[\![2;+\infty[\![$, on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{np}\text{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$.

1. (a) La fonctions sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc il existe un unique réel α tel que $\text{sh}(\alpha)=\dfrac{-1}{2}$ donc tel que $2\text{sh}(\alpha)+1=0$.

(b) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit puis somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ u'(x)=\text{ch}(x)(2\text{sh}(x)+1)$.
La fonction u est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty]$ et $u(\alpha)=\text{ch}^2(\alpha)+\text{sh}(\alpha)=1+\text{sh}^2(\alpha)+\text{sh}(\alpha)=1+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}\geqslant 0$. On en déduit donc que $\forall x\in\mathbb{R},\ u(x)\geqslant 0$.

(c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\text{ch}(x)\mathbf{e}^{\text{sh}(x)}-1$$

Pour le signe, on a besoin de dérivée une seconde fois. La fonction f' est dérivable sur sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=\text{ch}^2(x)\mathbf{e}^{\text{sh}(x)}+\text{sh}(x)\mathbf{e}^{\text{sh}(x)}=u(x)\mathbf{e}^{\text{sh}(x)}\geqslant 0$$

La fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(0)=0$ donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

(d) On démontre chacune des inégalités séparément.

$$\forall x\in]0;1[,\ f(0)\leqslant f(x)\text{ donc } 0\leqslant \mathbf{e}^{\text{sh}(x)}-x-1 \text{ donc } 1+x\leqslant \mathbf{e}^{\text{sh}(x)}.$$

Pour la seconde,

$$\forall x\in]0;1[,\ f(-x)\geqslant f(0)\text{ donc } \mathbf{e}^{-\text{sh}(x)}+x-1\geqslant 0\text{ donc } \mathbf{e}^{-\text{sh}(x)}\geqslant 1-x\text{ donc } \mathbf{e}^{\text{sh}(x)}\leqslant\frac{1}{1-x}.$$

2. (a) On peut composer par ln dans les inégalités précédentes. Pour tout $k \in [\![n; np]\!]$, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &\leqslant u_n \leqslant -\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\\
\sum_{k=n}^{np} \ln(k+1) - \ln(k) &\leqslant u_n \leqslant -\sum_{k=n}^{np} \ln(k-1) - \ln(k)\\
\ln(np+1) - \ln(n) &\leqslant u_n \leqslant -(\ln(n-1) - \ln(np))\\
\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) &\leqslant u_n \leqslant -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)
\end{aligned}$$

(b) On applique la théorème d'encadrement.

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \ln(p) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right) = \ln(p)$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(p)$.

(c) Pour $p = 1$, on trouve que la suite (u_n) converge vers 0.
En effet, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$.